

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
21 februarie 2016

CLASA a X-a

1. Determinați funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ care verifică relația: $f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}$,

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$

2. Dacă $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfac $a^x + a^y + a^z + a^{-x} + a^{-y} + a^{-z} = 10$, să se demonstreze că $1 \leq a^x + a^y + a^z \leq 9$. Precizați când se realizează egalitățile.

3. Fie $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că:

$$\log_{bc^3}(a^3b^2) + \log_{ca^3}(b^3c^2) + \log_{ab^3}(c^3a^2) \geq \frac{15}{4}.$$

4. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, calculați $|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.